EXAMEN FÍSICA EvAU. Septiembre 2017

OPCIÓN A

1.

a) Aplicando el principio de conservación de la energía mecánica, obtenga una expresión para la velocidad de escape de un cuerpo desde la superficie de un planeta esférico de radio R y masa M.

b) Calcule la velocidad de escape desde la superficie de Mercurio sabiendo que posee una masa de $3{,}30 \cdot 10^{23}$ kg y una aceleración de la gravedad en su superficie de $3{,}70\ m/s^2$.

Dato: Constante de Gravitación Universal, $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N\ m^2\ kg^{-2}$.

a)

Dado que el campo gravitatorio es un campo conservativo, podemos afirmar que la energía mecánica en la superficie del planeta y en el infinito es la misma:

$$E_m\ (superficie) = E_m\ (\infty)$$

$$E_m\ (superficie) \begin{cases} E_c(sup.) = \dfrac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \rightarrow v: velocidad\ de\ escape \\ E_p\ (sup.) = -G \cdot \dfrac{m \cdot M}{R} \end{cases}$$

$$E_m\ (\infty) \begin{cases} E_c(\infty) = \dfrac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = 0\ J \rightarrow v = 0\ m/s \\ E_p\ (\infty) = -G \cdot \dfrac{m \cdot M}{R} = 0\ J \rightarrow R = \infty\ m \end{cases}$$

$$E_m\ (superficie) = E_m\ (\infty) \rightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - G \cdot \frac{m \cdot M}{R} = 0$$

$$\boldsymbol{v_e = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M}{R}}} \begin{cases} M: masa\ del\ planeta\ (kg) \\ m: masa\ de\ la\ nave\ (kg) \\ R: radio\ del\ planeta\ (m) \end{cases}$$

b)

$$v_e = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M}{R}} \rightarrow Necesitamos\ calcular\ R$$

Sabemos que se cumple la igualdad:

$$\left|\overrightarrow{F_G}\right| = \left|\vec{P}\right| \rightarrow G \cdot \frac{m \cdot M}{R^2} = m \cdot g$$

$$R = \sqrt{G \cdot \frac{M}{g}} = \sqrt{(6{,}67 \cdot 10^{-11}) \cdot \frac{(3{,}30 \cdot 10^{23})}{3{,}70}} = 2{,}44 \cdot 10^6\ m \rightarrow Radio\ de\ Mercurio$$

Sustituyendo en la primera expresión obtenemos:

$$v_e = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M}{R}} = \sqrt{\frac{2 \cdot (6{,}67 \cdot 10^{-11}) \cdot (3{,}30 \cdot 10^{23})}{(2{,}44 \cdot 10^6)}} = \mathbf{4248\ m/s}$$

2. La perturbación asociada a una onda viene descrita por la expresión:
ψ(x, t) = 10^{-8} sen (2.765 t + 1,85 x), donde ψ y x se expresan en metros y t en segundos.

a) Indique su dirección y sentido de propagación, y calcule su longitud de onda y su frecuencia.
b) Obtenga la velocidad de propagación de la onda y la velocidad máxima de oscilación.

a)

Deducimos que se trata de una onda armónica porque la ecuación que nos dan depende de dos variables, x y t.
La ecuación de una onda armónica unidimensional es:

$$\Psi(x,t) = A\ sen\ (wt \pm kx + \varphi_0) \begin{cases} Signo\ +: La\ onda\ se\ desplaza\ sentido\ negativo\ eje\ x \\ Signo\ -: La\ onda\ se\ desplaza\ sentido\ positivo\ eje\ x \end{cases}$$

$$\Psi(x,t) = 10^{-8}\ sen\ (2.765\ t + 1{,}85x) \begin{cases} A = 10^{-8}\ m \\ w = 2.765\ rad/s \\ k = 1{,}85\ m^{-1} \\ \varphi_0 = 0\ rad \end{cases}$$

- Dirección y sentido de propagación: **Sentido positivo del eje x.**
- Longitud de onda:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{1{,}85} = \mathbf{3,4\ m}$$

- Frecuencia:

$$w = 2\pi f \rightarrow f = \frac{w}{2\pi} = \frac{2.765}{2\pi} = \mathbf{440\ Hz}$$

b)

- Velocidad de propagación de la onda:

$$v_p = \lambda f = 3{,}4 \cdot 440 = \mathbf{1.496\ m/s}$$

- Velocidad máxima de oscilación:

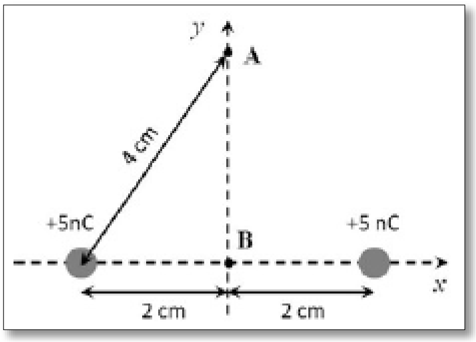
$$v = \frac{d\Psi(x,t)}{dt} = Aw\, cos\,(wt \pm kx + \varphi_0)$$

$$v_{máx.} = Aw \rightarrow cos\,(wt \pm kx + \varphi_0) = 1$$
$$v_{máx.} = Aw = 10^{-8} \cdot 2.765 = \mathbf{2{,}76 \cdot 10^{-5}\ m/s}$$

3. Dos cargas de 5 nC están separadas una distancia de 4 cm de acuerdo a la figura adjunta. Calcule:

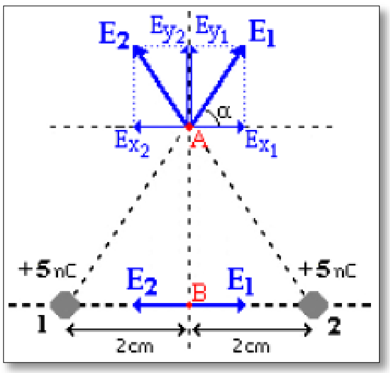
a) El campo eléctrico en el punto A y en el punto B creado por ambas cargas.
b) El potencial eléctrico en el punto A y en el punto B, y el trabajo que hay que realizar sobre una carga de 3 nC para desplazarla desde el punto A al punto B.

Dato: Constante de la Ley de Coulomb, K = $9 \cdot 10^9$ N m^2 C^{-2}.



a)

En primer lugar representaremos gráficamente los vectores campo eléctrico de las cargas en los puntos A y B:



- Analizamos los vectores que actúan sobre el punto A, para ello descomponemos los vectores E_1 y E_2.

$$\overrightarrow{E_1} = \overrightarrow{E_{1x}} + \overrightarrow{E_{1y}} \begin{cases} \overrightarrow{E_{1x}} = E_1 \cdot \cos\alpha \cdot \vec{\imath} = 28.125 \cdot \cos 60° \cdot \vec{\imath} \\ \overrightarrow{E_{1y}} = E_1 \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot \vec{\jmath} = 28.125 \cdot \operatorname{sen} 60° \cdot \vec{\jmath} \end{cases}$$
$$E_1 = \left|\overrightarrow{E_1}\right| = k \cdot \frac{|q_1|}{r_1^2} = (9 \cdot 10^9) \cdot \frac{|5 \cdot 10^9|}{0{,}04^2} = 28.125\ N/C$$

$$\overrightarrow{E_2} = \overrightarrow{E_{2x}} + \overrightarrow{E_{2y}} \begin{cases} \overrightarrow{E_{2x}} = E_2 \cdot \cos\alpha \cdot -\vec{\imath} = -28.125 \cdot \cos 60° \cdot \vec{\imath} \\ \overrightarrow{E_{2y}} = E_2 \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot \vec{\jmath} = 28.125 \cdot \operatorname{sen} 60° \cdot \vec{\jmath} \end{cases}$$
$$E_2 = \left|\overrightarrow{E_2}\right| = k \cdot \frac{|q_2|}{r_2^2} = (9 \cdot 10^9) \cdot \frac{|5 \cdot 10^9|}{0{,}04^2} = 28.125\ N/C$$

$$\overrightarrow{E_A} = \overrightarrow{E_1} + \overrightarrow{E_2} = \mathbf{48.714}\,\vec{\jmath}\ \boldsymbol{N/C}$$

- Analizamos los vectores que actúan sobre el punto B, para ello descomponemos los vectores E_1 y E_2.

$$\overrightarrow{E_1} = \overrightarrow{E_{1x}} + \overrightarrow{E_{1y}} \begin{cases} \overrightarrow{E_{1x}} = E_1 \cdot \vec{\imath} = 112.500\,\vec{\imath} \\ \overrightarrow{E_{1y}} = 0\,\vec{\jmath} \end{cases}$$
$$E_1 = \left|\overrightarrow{E_1}\right| = k \cdot \frac{|q_1|}{r_1^2} = (9 \cdot 10^9) \cdot \frac{|5 \cdot 10^9|}{0{,}02^2} = 112.500\ N/C$$

$$\overrightarrow{E_2} = \overrightarrow{E_{2x}} + \overrightarrow{E_{2y}} \begin{cases} \overrightarrow{E_{2x}} = E_2 \cdot -\vec{\imath} = -112.500\,\vec{\imath} \\ \overrightarrow{E_{2y}} = 0\,\vec{\jmath} \end{cases}$$
$$E_2 = \left|\overrightarrow{E_2}\right| = k \cdot \frac{|q_2|}{r_2^2} = (9 \cdot 10^9) \cdot \frac{|5 \cdot 10^9|}{0{,}02^2} = 112.500\ N/C$$

$$\overrightarrow{E_B} = \overrightarrow{E_1} + \overrightarrow{E_2} = \mathbf{0}\ \boldsymbol{N/C}$$

b)

Analizamos el potencial eléctrico en los puntos A y B.

$$V_A = V_1 + V_2 = k \cdot \frac{q_1}{r_1} + k \cdot \frac{q_2}{r_2} \begin{cases} q_1 = q_2 = 5 \cdot 10^9\ C \\ r_1 = r_2 = 0{,}04\ m \end{cases}$$
$$V_A = V_1 + V_2 = 2 \cdot (9 \cdot 10^9) \cdot \frac{(5 \cdot 10^9)}{0{,}04} = \mathbf{2.250}\ \boldsymbol{V}$$

$$V_B = V_1 + V_2 = k \cdot \frac{q_1}{r_1} + k \cdot \frac{q_2}{r_2} \begin{cases} q_1 = q_2 = 5 \cdot 10^9\ C \\ r_1 = r_2 = 0{,}02\ m \end{cases}$$
$$V_B = V_1 + V_2 = 2 \cdot (9 \cdot 10^9) \cdot \frac{(5 \cdot 10^9)}{0{,}02} = \mathbf{4.500}\ \boldsymbol{V}$$

El trabajo que hay que realizar sobre una carga de 3 nC para desplazarla desde el punto A al punto B es:

$$W_{A\to B} = -q \cdot \Delta V = -q \cdot (V_B - V_A) = -(3 \cdot 10^9\ ) \cdot (4.500 - 2.250) = \mathbf{-6,75 \cdot 10^{-6}\, J}$$

El signo negativo indica que tenemos que luchar en contra del campo eléctrico para trasladar la carga del punto A al punto B.

4. Sea una lente convergente de distancia focal de 5 cm.

a) Calcule la distancia entre la lente y la imagen formada para un objeto situado en el infinito, y para un objeto situado a 20 cm de la lente.

b) Determine el tamaño de un objeto que está situado a 20 cm de la lente y forma una imagen de 30 mm de altura, y realice el diagrama de rayos correspondiente para la formación de la imagen.

a)

Para calcular la distancia entre la lente y la imagen formada aplicaremos la ecuación fundamental de las lentes delgadas.

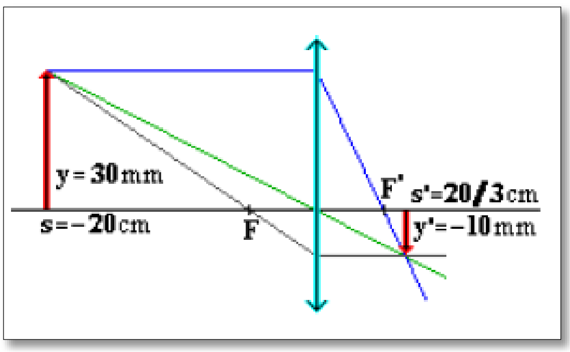
$$Para\ un\ objeto\ situado\ en\ el\ \infty \to \frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} \begin{cases} f' = 5\ cm \\ s = -\infty \end{cases} \to \frac{1}{s'} - \frac{1}{-\infty} = \frac{1}{5} \to s' = \mathbf{5\ cm}$$

$$Para\ un\ objeto\ a\ 20\ cm \to \frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} \begin{cases} f' = 5\ cm \\ s = -20\ cm \end{cases} \to \frac{1}{s'} - \frac{1}{-20} = \frac{1}{5} \to s' = \mathbf{6,7\ cm}$$

b)

El tamaño de un objeto que está situado a 20 cm de la lente y forma una imagen de 30 mm de altura es:

$$Aumento\ lateral \to A = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} \begin{cases} y' = -30\ cm \\ s' = 6{,}7 cm \\ s = -20\ cm \end{cases} \to y = \frac{y' \cdot s}{s'} = \mathbf{90\ mm}$$



5. Un átomo de ^{238}U se desintegra a través de una cascada radioactiva y da lugar a un átomo de ^{206}Pb, siendo el periodo de semi-desintegración del ^{238}U de $4{,}47 \cdot 10^9$ años. Una muestra mineral de monacita contiene 2,74 mg de ^{238}U y 1,12 mg de ^{206}Pb procedentes de la desintegración del uranio.

a) Obtenga el número de átomos iniciales de ^{238}U en la muestra, a partir del cálculo del número de átomos de uranio y de plomo existentes en ella.

b) Calcule la antigüedad del mineral y determine la actividad actual de la muestra.

Datos: Masa atómica del ^{238}U, M_U = 238,05 u; Masa atómica del plomo ^{206}Pb, M_{Pb} = 205,97 u; Número de Avogadro, $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ mol^{-1}.

a)

El número de átomos iniciales de ^{238}U en la muestra se obtiene sumando el número de núcleos de ^{238}U que no se han desintegrado más el número de núcleos de ^{206}Pb que se han formado.

$$Átomos\ iniciales\ de\ ^{238}U \rightarrow N_0 = N_U + N_{Pb} = (6{,}93 \cdot 10^{18}) + (3{,}27 \cdot 10^{18}) = \mathbf{1{,}02\ \cdot 10^{19}}$$

$$N_U = m \cdot \frac{1\ mol}{M_U} \cdot \frac{6{,}02 \cdot 10^{23}\ núcleos}{1\ mol} = (2{,}74 \cdot 10^{-3}) \cdot \frac{1\ mol}{238{,}05 g} \cdot \frac{6{,}02 \cdot 10^{23}\ n}{1\ mol} = 6{,}93 \cdot 10^{18}$$

$$N_{Pb} = m \cdot \frac{1\ mol}{M_{Pb}} \cdot \frac{6{,}02 \cdot 10^{23}\ núcl.}{1\ mol} = (1{,}12 \cdot 10^{-3}) \cdot \frac{1\ mol}{205{,}97 g} \cdot \frac{6{,}02 \cdot 10^{23}\ n}{1\ mol} = 3{,}27 \cdot 10^{18}$$

b)

La antigüedad del mineral se calcula mediante la ecuación:

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \begin{cases} \lambda: constante\ de\ desintegración\ (años^{-1}) \\ t: tiempo\ que\ tarda\ en\ desintegrarse\ el\ mineral\ (años) \\ N_0: número\ de\ átomos\ iniciales\ del\ mineral \end{cases}$$

El tiempo necesario para que el número inicial de núcleos de se reduzca a la mitad me permite calcular la constante de desintegración del ^{238}U.

$$\frac{N_0}{2} = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot T_{\frac{1}{2}}} \rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\lambda \cdot T_{\frac{1}{2}}} \rightarrow -\lambda \cdot T_{\frac{1}{2}} = Ln\left(\frac{1}{2}\right) \rightarrow -\lambda \cdot T_{\frac{1}{2}} = Ln\ 1 - Ln\ 2$$

$$-\lambda \cdot T_{\frac{1}{2}} = 0 - Ln\ 2 \rightarrow \lambda \cdot T_{\frac{1}{2}} = Ln\ 2 \rightarrow \lambda = \frac{Ln\ 2}{T_{\frac{1}{2}}} = \frac{Ln\ 2}{(4{,}47 \cdot 10^9)} = 1{,}55 \cdot 10^{-10}$$

$$\boldsymbol{\lambda = 1{,}55 \cdot 10^{-10} años^{-1}}\ siendo\ T_{\frac{1}{2}} = 4{,}47 \cdot 10^9\ años$$

Finalmente:

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \rightarrow 6{,}93 \cdot 10^{18} = (1{,}02 \ \cdot 10^{19}) \cdot e^{-1{,}55 \cdot 10^{-10} \cdot t}$$

$$\frac{6{,}93 \cdot 10^{18}}{1{,}02 \ \cdot 10^{19}} = e^{-1{,}55 \cdot 10^{-10} \cdot t} \rightarrow Ln\left(\frac{6{,}93 \cdot 10^{18}}{1{,}02 \ \cdot 10^{19}}\right) = -1{,}55 \cdot 10^{-10} \cdot t \rightarrow t \approx \boldsymbol{2{,}5 \cdot 10^{9}\ años}$$

La actividad actual de la muestra será:

$$A = \lambda \cdot N = (1{,}55 \cdot 10^{-10}) \cdot (6{,}93 \cdot 10^{18}) = \boldsymbol{1{,}07 \cdot 10^{9}\ desintegraciones/año}$$

$$A = (1{,}07 \cdot 10^{9}) \cdot \frac{1\ año}{365\ días} \cdot \frac{1\ día}{24h} \cdot \frac{1h}{3600s} \approx \boldsymbol{34{,}1\ Bq}\ (Becquerel)$$

OPCIÓN B

1.

a) A partir de la ley fundamental de la dinámica, deduzca la expresión de la velocidad orbital de un satélite que gira en una órbita circular de radio R alrededor de un planeta de masa M.

b) Si un satélite de 21 kg gira alrededor del planeta Marte, calcule el radio de la órbita circular y la energía mecánica del satélite si su periodo es igual al de rotación del planeta.

Datos: Masa de Marte, M_{Marte} = 6,42· 10^{23} kg; Periodo de rev. del planeta, T_{Marte} = 24,62 h; Constante de Gravitación Universal, G = 6,67· 10^{-11} N m^2 kg^{-2}.

a)

La velocidad orbital de un satélite que gira en una órbita circular de radio R alrededor de un planeta de masa M se deduce igualando las siguientes expresiones:

$$\text{Órbita circular} \rightarrow F_C = m \cdot a_C = m \cdot \frac{v^2}{R} \begin{cases} v: \text{velocidad orbital } (m/s) \\ m: \text{masa del satélite } (kg) \\ R: \text{radio de la órbita } (m) \end{cases}$$

$$\text{Fuerza gravitatoria} \rightarrow F_G = G \cdot \frac{M \cdot m}{R^2} \begin{cases} M: \text{masa del planeta } (kg) \\ m: \text{masa del satélite } (kg) \\ R: \text{dist. del satélite a la sup. del planeta } (m) \end{cases}$$

$$F_C = F_G \rightarrow m \cdot \frac{v^2}{R} = G \cdot \frac{M \cdot m}{R^2} \rightarrow \boldsymbol{v} = \sqrt{\boldsymbol{G} \cdot \frac{\boldsymbol{M}}{\boldsymbol{R}}}$$

b)

El radio de la órbita circular será:

$$R = \frac{G \cdot M}{v^2} = \frac{G \cdot M}{(w \cdot R)^2} = \frac{G \cdot M}{w^2 \cdot R^2} \rightarrow R^3 = \frac{G \cdot M}{w^2} \rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{G \cdot M}{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2}}$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{(6{,}67 \cdot 10^{-11}) \cdot (6{,}42 \cdot 10^{23})}{\left(\frac{2\pi}{24{,}62 \cdot 3600}\right)^2}} \approx \mathbf{2{,}04 \cdot 10^7} \boldsymbol{m}$$

La energía mecánica del satélite será:

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - G \cdot \frac{m \cdot M}{R} \rightarrow v^2 = G \cdot \frac{M}{R}$$

$$E_m = \frac{1}{2} \cdot G \cdot \frac{m \cdot M}{R} - G \cdot \frac{m \cdot M}{R} = -\frac{1}{2} \cdot G \cdot \frac{m \cdot M}{R}$$

$$E_m = -\frac{1}{2} \cdot (6{,}67 \cdot 10^{-11}) \cdot \frac{21 \cdot (6{,}42 \cdot 10^{23})}{2{,}04 \cdot 10^7} = \boldsymbol{-2{,}2 \cdot 10^7 J}$$

2. Una fuente puntual de 3 µW emite una onda sonora.

a) ¿Qué magnitud física "oscila" en una onda de sonido? ¿Es una onda longitudinal o transversal?

b) Calcule la intensidad sonora y el nivel de intensidad sonora a 5 m de la fuente. Determine a qué distancia del foco emisor se debe situar un observador para dejar de percibir dicho sonido.

Dato: Intensidad umbral de audición, $I_0 = 10^{-12}$ W m^{-2}

a)

El sonido es una onda mecánica longitudinal, es decir, necesita un medio para propagarse. Al viajar a través del medio, la onda sonora produce una variación de presión en la dirección de propagación, o lo que es lo mismo, una oscilación de presiones.

b)

La intensidad sonora en un punto situado a 5 m de la fuente será:

$$I = \frac{P}{S} = \frac{3 \cdot 10^{-6}}{4\pi \cdot 5^2} = \boldsymbol{9{,}55 \cdot 10^{-9}\ W/m^2} \begin{cases} P: potencia\ (W) \\ S: sup.\ onda\ (sup.\ esf.)\ (m^2) \rightarrow S = 4\pi r^2 \end{cases}$$

El nivel de intensidad sonora en un punto situado a 5 m de la fuente será:

$$\beta = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0} \begin{cases} I: intensidad\ sonora\ (W/m^2) \\ I_0: intensidad\ umbral\ audición\ humana\ (W/m^2) \end{cases}$$

$$\beta = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right) = 10 \cdot \log\left(\frac{9{,}55 \cdot 10^{-9}}{10^{-12}}\right) = \boldsymbol{39{,}8}$$

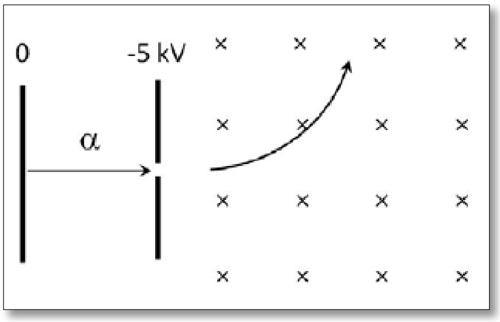
Para que un observador deje de percibir el sonido se tiene que situar a la siguiente distancia del foco:

$$I_0 = \frac{P}{S} = \frac{P}{4\pi {r_0}^2} \rightarrow r_0 = \sqrt{\frac{P}{4\pi I_0}} = \sqrt{\frac{1 \cdot 10^{-6}}{4\pi \cdot 10^{-12}}} = \boldsymbol{489\ m}$$

3. Una partícula alfa (núcleo de helio) inicialmente en reposo se acelera a través de una diferencia de potencial de 5 kV, y entra en una región con un campo magnético de 0,3 T perpendicular a su velocidad, como muestra la figura. Determine al penetrar en el campo magnético:

a) La energía cinética adquirida por la partícula y el módulo de su velocidad.
b) La fuerza magnética que experimenta la partícula y el radio de curvatura de la trayectoria.

Dato: Valor absoluto de la carga del electrón, e = 1,6 · 10^{-19} C; Masa de la partícula alfa m_α = 6,68 · 10^{-27} kg.



a)

Cuando la partícula alfa, cargada positivamente, penetra en el campo eléctrico la partícula se desplaza hacia la zona más electronegativa, es decir, hacia la zona de menor potencial, acelerándose.

$$q_\alpha = +2q_e \rightarrow \Delta V = -5000\ V$$

Teniendo en cuenta que el campo eléctrico es conservativo, la energía cinética adquirida por la partícula durante este proceso será:

$$\Delta E_m = \Delta E_c + \Delta E_p = 0 \rightarrow \Delta E_c = -\Delta E_p \rightarrow W = -\Delta E_p = -q \cdot \Delta V$$

$$\Delta E_c = -q \cdot \Delta V = -(2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}) \cdot (-5000) = \mathbf{1,6 \cdot 10^{-15}}\ \boldsymbol{J}$$

b)

Cuando la partícula acelerada entra en el campo magnético el campo ejerce una fuerza sobre la misma, desviando su trayectoria.

$$\vec{F} = q \cdot (\vec{v}\ x\ \vec{B}) \begin{cases} q: carga\ de\ la\ partícula\ (C) \\ \vec{v}: velocidad\ de\ la\ partícula\ (m/s) \\ \vec{B}: intensidad\ del\ campo\ magnético\ (T) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{v} = v \cdot \vec{\imath} \rightarrow E_C = \dfrac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \rightarrow v = \sqrt{\dfrac{2 \cdot E_C}{m}} = \sqrt{\dfrac{2 \cdot (1{,}6 \cdot 10^{-15})}{6{,}68 \cdot 10^{-27}}} = 6{,}92 \cdot 10^5\ m/s \\ \vec{B} = -B\vec{k} \rightarrow B = 0{,}3\ T \end{cases}$$

$$\vec{F} = q \cdot (\vec{v}\ x\ \vec{B}) \begin{cases} q = 2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ C \\ \vec{v} = (6{,}92 \cdot 10^5)\vec{\imath} = (6{,}92 \cdot 10^5; 0; 0)\ m/s \\ \vec{B} = -0{,}3\vec{k} = (0; 0;\ -0{,}3)\ T \end{cases}$$

$$\vec{F} = q \cdot (\vec{v}\ x\ \vec{B}) = (2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}) \cdot \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 6{,}92 \cdot 10^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}3 \end{vmatrix} = \mathbf{6{,}64 \cdot 10^{-14}}\ \vec{\boldsymbol{\jmath}}\ \boldsymbol{N}$$

La trayectoria que sigue la partícula tras haber sido desviada es circular, es decir, la fuerza que ejerce el campo magnético sobre dicha partícula es una fuerza centrípeta.

El radio de curvatura de la trayectoria que sigue la partícula será:

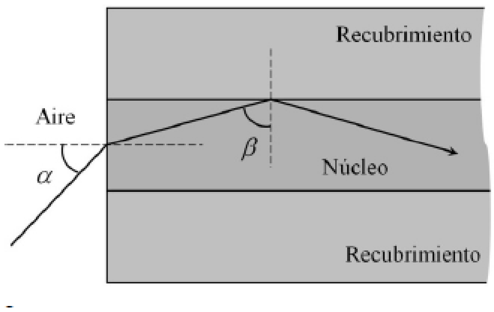
$$Trayectoria\ circular \rightarrow F_C = m \cdot a_C = m \cdot \frac{v^2}{r} \begin{cases} v: velocidad\ partícula\ (m/s) \\ m: masa\ de\ la\ partícula\ (kg) \\ r: radio\ de\ la\ curva\ (m) \end{cases}$$

$$F = F_C \rightarrow F = m \cdot \frac{v^2}{r} \rightarrow r = m \cdot \frac{v^2}{F} = (6{,}68 \cdot 10^{-27}) \cdot \frac{(6{,}92 \cdot 10^5)^2}{6{,}64 \cdot 10^{-14}} = \mathbf{0{,}048\ m}$$

4. Una fibra óptica de vidrio posee un núcleo con un índice de refracción de 1,55, rodeado por un recubrimiento de índice de refracción de 1,45. Determine:

a) El ángulo mínimo β que debe tener un rayo que viaja por la fibra óptica a partir del cual se produce reflexión total interna entre el núcleo y el recubrimiento.
b) El ángulo máximo de entrada α a la fibra para que un rayo viaje confinado en la región del núcleo.

Dato: Índice de refracción del aire, $n_{aire} = 1$.



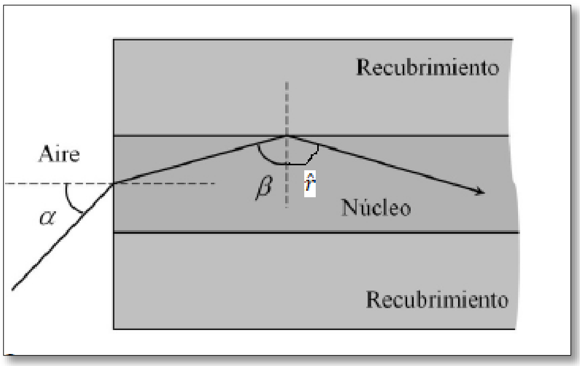
a)

El fenómeno de reflexión total se produce cuando toda la luz se refleja, es decir, cuando el ángulo de refracción es de 90^0. Este fenómeno sucede cuando la luz pasa de un medio con mayor índice de refracción a otro medio con menor índice de refracción.

El ángulo de incidencia a partir del cual empieza a producirse este fenómeno se denomina ángulo mínimo o límite.

Para calcular este ángulo aplicaremos la segunda Ley de Snell en la superficie de separación de los dos medios, es decir, entre el núcleo y el recubrimiento.

$$\frac{n_{núc.}}{n_{recub.}} = \frac{sen\,\hat{r}}{sen\,\beta} \rightarrow \frac{1{,}55}{1{,}45} = \frac{sen\,90°}{sen\,\beta} \rightarrow \beta = \mathbf{69,3°} \begin{cases} \beta: ángulo\ límite \\ \hat{r}: ángulo\ de\ refracción\ (recub. - núc.) \end{cases}$$



b)

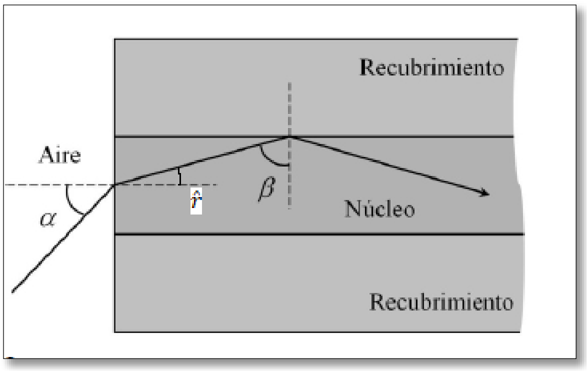
Si observamos la imagen adjunta, el ángulo máximo de entrada a la fibra que permite que el rayo viaje por el interior del núcleo es el ángulo α.

Para calcularlo aplicaremos la segunda Ley de Snell en la superficie de separación del aire y el núcleo.

$$\frac{n_{aire}}{n_{núc.}} = \frac{sen\,\hat{r}}{sen\,\alpha} \rightarrow \frac{1}{1{,}55} = \frac{sen\,20{,}7°}{sen\,\alpha} \rightarrow \alpha = \mathbf{33,2°} \begin{cases} \alpha: ángulo\ máximo \\ \hat{r}: ángulo\ de\ refracción\ (aire - núc.) \end{cases}$$

Calculamos $\hat{r}$ aplicando reglas trigonométricas básicas:

$$\beta + \hat{r} = 90° \rightarrow 69{,}3° + \hat{r} = 90° \rightarrow \hat{r} = 20{,}7°$$



5. Para observar el efecto fotoeléctrico sobre un metal que posee una función de trabajo de 2,1 eV se utiliza una lámpara de Cd que emite en cuatro líneas espectrales de distinta longitud de onda: línea roja a 643,8 nm; línea verde a 538,2 nm; línea azul a 480,0 nm y línea violeta a 372,9 nm.

a) ¿Qué líneas espectrales provocarán efecto fotoeléctrico en ese material? Justifique la respuesta. Calcule la energía cinética máxima de los fotoelectrones si se utiliza la línea espectral azul.
b) Determine la longitud de onda de De Broglie asociada a los fotoelectrones con energía cinética máxima utilizando la línea azul. ¿Podrían ser considerados esos electrones como relativistas? Justifique la respuesta.

Datos: Velocidad de la luz en el vacío, $c = 3 \cdot 10^{8}$ m s^{-1}; Constante de Planck, $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J · s; Valor absoluto de la carga del electrón, $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C; Masa en reposo del electrón, $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg.

a)

Para que se produzca el efecto fotoeléctrico la energía de la radiación electromagnética que incide sobre el metal tiene que ser mayor que el trabajo de extracción del mismo.

La lámpara emite cuatro radiaciones. Vamos a calcular le energía asociada a cada una de las radiaciones y vamos a comparar dichos valores con el trabajo de extracción del metal.

$$Trabajo\ de\ extracción\ del\ metal \rightarrow W_{ext.} = 2{,}1\ eV$$

$$Línea\ roja \rightarrow \lambda = 643{,}8\ nm = 643{,}8 \cdot 10^{-9}\ m$$
$$E_{rojo} = h \cdot \frac{c}{\lambda} = (6{,}63 \cdot 10^{-34}) \cdot \frac{(3 \cdot 10^{8})}{(643{,}8 \cdot 10^{-9})} = 3{,}09 \cdot 10^{-19}\ J$$
$$E_{rojo} = (3{,}09 \cdot 10^{-19}) \cdot \frac{1\ eV}{(1{,}6 \cdot 10^{-19})} = 1{,}93\ eV < W_{ext.}$$

$$Línea\ verde \rightarrow \lambda = 538{,}2\ nm = 538{,}2 \cdot 10^{-9}\ m$$
$$E_{verde} = h \cdot \frac{c}{\lambda} = (6{,}63 \cdot 10^{-34}) \cdot \frac{(3 \cdot 10^{8})}{(538{,}2 \cdot 10^{-9})} = 3{,}70 \cdot 10^{-19}\ J$$
$$E_{verde} = (3{,}70 \cdot 10^{-19}) \cdot \frac{1\ eV}{(1{,}6 \cdot 10^{-19})} = 2{,}30\ eV > W_{ext.}$$

Las líneas verde, azul y violeta producen efecto fotoeléctrico en el metal, ya que su energía es mayor que el trabajo de extracción del mismo.

La energía cinética máxima de los fotones de la línea espectral azul es:

$$Línea\ azul \rightarrow \lambda = 480{,}0\ nm = 480{,}0 \cdot 10^{-9}\ m$$
$$E_{azul} = h \cdot \frac{c}{\lambda} = (6{,}63 \cdot 10^{-34}) \cdot \frac{(3 \cdot 10^{8})}{(480{,}0 \cdot 10^{-9})} = 4{,}14 \cdot 10^{-19}\ J$$
$$E_{azul} = (4{,}14 \cdot 10^{-19}) \cdot \frac{1\ eV}{(1{,}6 \cdot 10^{-19})} = 2{,}59\ eV$$
$$E_c = E_{azul} - W_{ext.} = 2{,}59 - 2{,}1 = 0{,}49\ eV = 0{,}49 \cdot \frac{(1{,}6 \cdot 10^{-19})}{1\ eV} = \mathbf{7{,}84 \cdot 10^{-20}\ J}$$

b)

La longitud de onda de De Blogie asociada a los fotoelectrones con energía cinética máxima de la línea azul es:

$$\lambda_{DB} = \frac{h}{m \cdot v} = \frac{h}{\sqrt{2 \cdot m \cdot E_c}} = \frac{(6{,}63 \cdot 10^{-34})}{\sqrt{2 \cdot (9{,}1 \cdot 10^{-31}) \cdot (7{,}84 \cdot 10^{-20})}} = \mathbf{1,76 \cdot 10^{-9}\ m}$$

Una partícula se considera relativista si su velocidad es superior al 20% de la velocidad de la luz. Para comprobar si los fotoelectrones de la línea azul son relativistas tenemos que calcular la velocidad a la que viajan:

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot E_c}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot (7{,}84 \cdot 10^{-20})}{(9{,}1 \cdot 10^{-31})}} = 4{,}15 \cdot 10^5\ m/s$$

$$Comparando\ las\ velocidades \rightarrow \frac{v}{c} \cdot 100\ (\%) = \frac{4{,}15 \cdot 10^5}{3 \cdot 10^8} \cdot 100\ (\%) = 0{,}1\% < 20\%$$

Solución: los fotoelectrones de la línea azul no son relativistas.