EXAMEN MATEMÁTICAS UNED

Convocatoria Extraordinaria. Curso 2018-2019

CUESTIONES TIPO TEST

1. La matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ verifica que $A^2 = I$ siendo I la matriz identidad, cuando:
   a) a = 0
   b) a = ±1
   c) a = ±2

   Calculamos:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = I \to a^2 = 1 \to a = \sqrt{1} = \pm 1$$

2. El rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ es:
   a) Uno
   b) Dos
   c) Tres

   El rango de A se calcula estudiando sus determinates:

$$|A|_3 = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-8+1+1) - (-2-2-2) = -6 - (-6) = 0 \to Rg\ A \neq 3$$

$$|A|_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - (-2) = 3 \neq 0 \to Rg\ A = 2$$

3. Sea A una matriz cuadrada de tamaño 3 x 3. Si el determinante de A es det A = 3, entonces el determinante de la matriz traspuesta A^t es:
   a) Det (A^t) = -3
   b) Det (A^t) = 1/3
   c) Det (A^t) = 3

   Por propiedades de los determinantes: $|A| = |A^t|$

4. El conjunto de soluciones del sistema: $\begin{cases} 3x+y=1 \\ x-y+2z=-3 \end{cases}$ es:
   a) $\{(\lambda, 1-3\lambda, -1-2\lambda) : \lambda \in R\}$
   b) $\{(1-3\lambda, \lambda, -1-2\lambda) : \lambda \in R\}$
   c) $\{(-1-2\lambda, 1-3\lambda, \lambda) : \lambda \in R\}$

   Dado que es un sistema de 3 ecuaciones con 2 incógnitas (nº ecs. < nº incógn.), se trata de un sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones).

$$\begin{cases} 3x+y=1 \to y=1-3x \\ x-y+2z=-3 \end{cases} \to x-(1-3x)+2z=-3 \to 4x+2z=-2 \to z=-1-2x$$

$$\begin{cases} x=\lambda \\ y=1-3x=1-3\lambda \quad \forall\lambda \in R \\ z=-1-2\lambda \end{cases}$$

5. Las rectas $r: x=y-1=z$ y $s: \frac{x-1}{2}=y-2=\frac{z-2}{4}$:
   a) Son paralelas
   b) Se cortan en un punto
   c) No son paralelas, ni se cortan en un punto

   Para saber cual es la posición relativas de las rectas r y s estudiamos la posición de sus vectores directores:

$$\begin{cases} \vec{u_r}=(1,1,1) \\ \vec{u_s}=(2,1,4) \end{cases} \to \vec{u_r} \neq \vec{u_s}$$

$$Como\ \vec{u_r} \neq \vec{u_s} \begin{cases} Se\ cortan \to \overrightarrow{PQ}, \vec{u_r}, \vec{u_s}\ pertenecen\ al\ mismo\ plano \\ Se\ cruzan \to \overrightarrow{PQ}, \vec{u_r}, \vec{u_s}\ no\ pertenecen\ al\ mismo\ plano \end{cases}$$

$$\begin{cases} Recta\ r: P=(0,1,0) \\ Recta\ r: Q=(1,2,2) \end{cases} \to \overrightarrow{PQ}=(1,2,2)-(0,1,0)=(1,1,2)$$

$$[\overrightarrow{PQ}, \vec{u_r}, \vec{u_s}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (4+2+2)-(4+1+4) = -1 \neq 0 \to Son\ vectores\ L.I.$$

$$\overrightarrow{PQ}, \vec{u_r}, \vec{u_s}\ no\ pertenecen\ al\ mismo\ plano \to \boldsymbol{La\ rectas\ r\ y\ s\ se\ cruzan}$$

6. La ecuación del plano que contiene a las rectas: $r: \frac{x+1}{2}=y=z+1$ y $s: \frac{x-5}{2}=y-4=z$ es:
   a) $3x-4y-2z+1=0$
   b) $x+2y+3z=1$
   c) $x+4y-z=0$

   Si estudiamos los vectores directores de las rectas observamos que son paralelas, ya que: $\vec{u_r}=\vec{u_s}$
   El plano buscado tendrá las siguientes características:

$$Recta\ r\begin{cases}\overrightarrow{u_r} = (2,1,1)\\ P_r(-1,0,-1)\end{cases}\quad Recta\ s\begin{cases}\overrightarrow{u_s}(2,1,1)\\ P_s(5,4,0)\end{cases} \to Plano\ \pi\begin{cases}P_r(-1,0,-1) \to Punto\ de\ \pi\\ \overrightarrow{P_rP_s}(6,4,1) \to Vect.director\ de\ \pi\\ \overrightarrow{u_s}(2,1,1) \to Vect.director\ de\ \pi\end{cases}$$

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y & z+1\\ 6 & 4 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix} = 0 \to [4(x+1)+6(z+1)+2y]-[8(z+1)+(x+1)+6y] = 0$$

$$\pi \equiv 3x-4y-2z+1=0$$

7. La ecuación del plano que pasa por los puntos P(1, 0, 0); Q(0, 2, 0) y R(0, 0, 1) es:
   a) $2x+y+2z=2$
   b) $x+y+z=2$
   c) $2x-y+2z=1$

Hay varias opciones para responder este ejercicio. Nosotros vamos a optar por la que consideramos más rápida.

Si los puntos pertenecen al plano, al sustituirlos en la ecuación del mismo deben cumplirla, es decir:

$$2x+y+2z=2\begin{cases}P(1,0,0) \to 2\cdot 1+0+2\cdot 0 = 2\\ Q(0,2,0) \to 2\cdot 0+2+2\cdot 0 = 2\\ R(0,0,1) \to 2\cdot 0+0+2\cdot 1 = 2\end{cases} \to Cumplen\ la\ ecuación\ todos\ los\ puntos$$

8. La distancia del punto P(4, 6, 0) al plano $\pi \equiv 2x-y+2z+1=0$
   a) 1
   b) 3
   c) 2

La distancia del punto P al plano π se calcula:

$$d(P,\pi) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\begin{cases}P(x_0,y_0,z_0) \to P=(4,6,0)\\ \pi \equiv ax+by+cz+d=0 \to \pi \equiv 2x-y+2z+1=0\end{cases}$$

$$d(A,\pi) = \frac{|2\cdot 4-6\cdot 1+2\cdot 0+1|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}} = \frac{|8-6+1|}{\sqrt{9}} = \frac{|3|}{3} = 1\ ud$$

9. La función $f(x) = sen\ x \cdot \cos x$:
   a) Es par, es decir, se verifica que $f(-x) = f(x)$
   b) Es impar, es decir, se verifica que $f(-x) = -f(x)$
   c) Es no negativa, es decir que $f(x) \geq 0\ \forall x \in R$

Comprobamos:

$$\begin{cases} f(x) = sen\, x \cdot \cos x \\ f(-x) = sen\,(-x) \cdot \cos(-x) \\ -f(x) = -sen\, x \cdot \cos x \end{cases}$$

$$sen\, x \neq sen\,(-x)\; y \cos(x) = \cos(-x) \rightarrow f(x) \neq f(-x)$$
$$-sen\, x = sen\,(-x)\; y \cos(x) = \cos(-x) \rightarrow -f(x) \neq f(-x)$$

10. La función:

$$f(x) \begin{cases} \dfrac{x}{lnx} & si\; x > 0 \\ 0 & si\; x = 0 \\ (x^2+1) & si\; x < 0 \end{cases}$$

a) Es continua en x = 0
b) Los límites laterales en x = 0 son finitos pero distintos
c) Uno de los límites laterales en x = 0 es infinito

Para que una función sea continua en un punto:
- La función tiene que existir en ese punto.
- Los límites laterales en ese punto tienen que existir y ser iguales.
- Ambos valores (función en el punto y límite en el punto) tienen que coincidir.

Comprobamos la continuidad de la función en x = 0.

- $\forall x = 0 \rightarrow y = f(0) = 0 \rightarrow \exists f(x)\; en\; x = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{lnx} = \frac{0}{0} \rightarrow LH \rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} (x^2+1) = 0 + 1 = 1 \end{cases} \rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$

Es decir, la función no es continua en x = 0.

Respuestas correctas: 1b), 2b), 3c), 4a), 5c), 6a), 7a), 8a), 9b), 10b).

PROBLEMAS

1. Dada la siguiente función:

$$f(x) = \frac{x}{9 - x^2}$$

a) Calcular el dominio y el conjunto de puntos donde la función es continua.
b) Estudiar si tiene asíntotas.
c) Estudiar el crecimiento y los extremos relativos.
d) Haga un dibujo aproximado de la gráfica.

a)

La función no existe cuando el denominador se anula, es decir:

$$f(x) = \frac{x}{9 - x^2} \rightarrow 9 - x^2 = 3^2 - x^2 = 0 \rightarrow (3 - x)(3 + x) = 0 \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases}$$

$$D = R - \{-3, 3\} = (-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, +\infty)$$

Solución: La función es continua en todo el conjunto de los números reales menos en los puntos x = -3 y x = 3.

b)

Estudiamos la existencia de asíntotas en la función:

- Asíntotas verticales:

  Como hemos estudiado en el apartado anterior, la función es continua en todos los números reales excepto en x = -3 y en x = 3. Estudiamos si hay asíntotas verticales en dichos puntos.

$$A.V. en\ x = 3 \rightarrow \lim_{x \to 3} f(x) = \pm\infty \begin{cases} \lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} \frac{x}{9 - x^2} = \frac{3{,}000 \ldots 1}{9 - 3{,}000 \ldots 1^2} = -\infty \\ \lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} \frac{x}{9 - x^2} = \frac{2{,}999 \ldots 9}{9 - 2{,}999 \ldots 9^2} = +\infty \end{cases}$$

$$A.V. en\ x = -3 \rightarrow \lim_{x \to -3} f(x) = \pm\infty \begin{cases} \lim_{x \to -3^+} f(x) = \lim_{x \to -3^+} \frac{x}{9 - x^2} = \frac{-2{,}999 \ldots 9}{9 - (-2{,}999 \ldots 9)^2} = -\infty \\ \lim_{x \to -3^-} f(x) = \lim_{x \to -3^-} \frac{x}{9 - x^2} = \frac{-3{,}000 \ldots 1}{9 - (-3{,}000 \ldots 1)^2} = +\infty \end{cases}$$

Conclusión: Hay asíntotas verticales en x = 3 y en x = -3.

- Asíntotas horizontales:

  Para que la función tenga asíntotas horizontales tiene que existir su límite cuando 'x' tiende a infinito y ser un número:

$$y = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0 \begin{cases} \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{9-x^2} = 0^+ \to Jerarquía\ de\ infinitos\ (\infty^2 > \infty) \\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{9-x^2} = 0^- \to Jerarquía\ de\ infinitos\ (\infty^2 > \infty) \end{cases}$$

Conclusión: Hay una asíntota horizontal en y = 0.

NOTA: Cuando hay A. H. no hay asíntotas oblicuas.

c)

Para estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento necesitamos establecer unos intervalos de estudio. Para ello tenemos en cuenta:

- Dominio de la función: $D = R - \{-3, 3\}$
- Puntos críticos: Máximos y mínimos → $f'(x) = 0 \to No\ hay\ ni\ máximos\ ni\ mínimos\ relativos$

$$f(x) = \frac{x}{9-x^2} \to f'(x) = \frac{1\cdot(9-x^2) - x\cdot(0-2x)}{(9-x^2)^2} = \frac{9+x^2}{(9-x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{9+x^2}{(9-x^2)^2} \to f'(x) = 0 \to f'(x) = \frac{9+x^2}{(9-x^2)^2} = 0 \to 9 + x^2 = 0 \to No\ tiene\ solución$$

- Puntos críticos: Puntos de inflexión → $f''(x) = 0 \to Hay\ un\ P.I.en\ x = 0$

$$f'(x) = \frac{9+x^2}{(9-x^2)^2} \to f''(x) = \frac{(0+2x)\cdot(9-x^2)^2 - (9+x^2)\cdot 2(9-x^2)\cdot(0-2x)}{(9-x^2)^4}$$

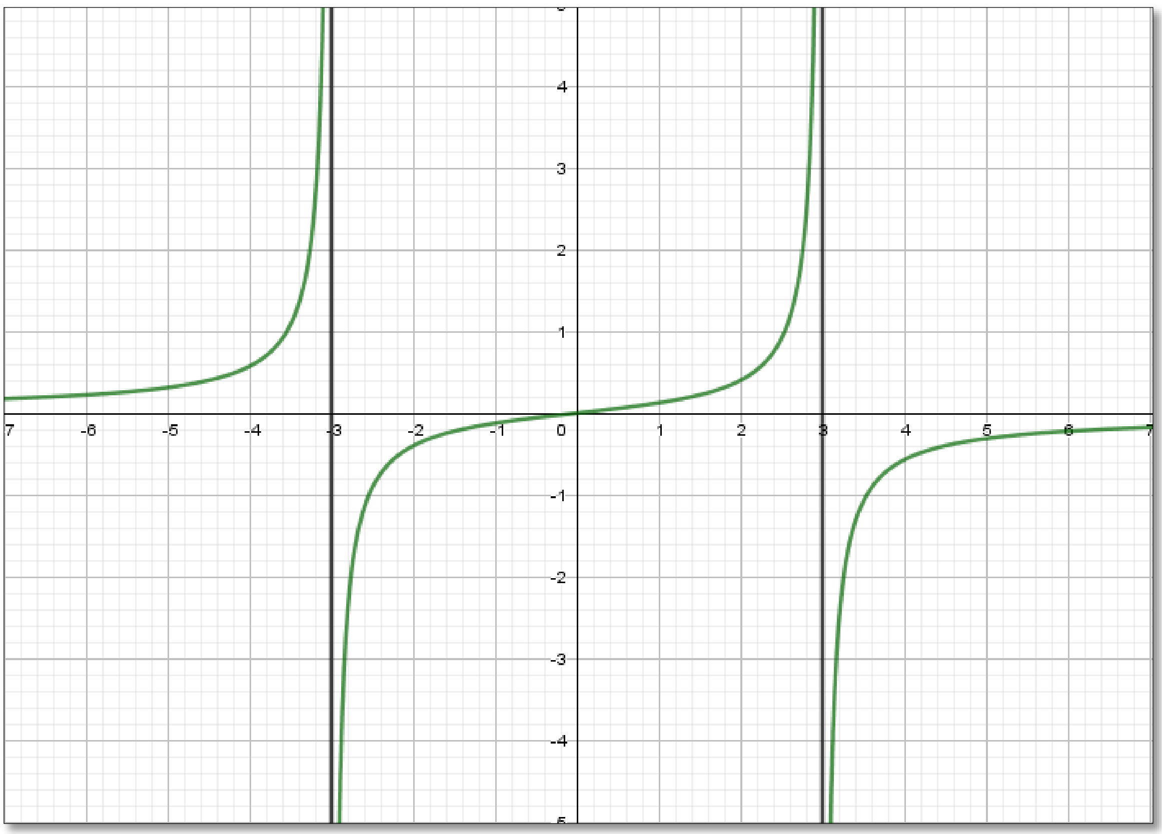
$$f''(x) = \frac{2x\cdot(27+x^2)}{(9-x^2)^3} \to f''(x) = 0 \to f'(x) = \frac{2x\cdot(27+x^2)}{(9-x^2)^3} = 0 \to 2x\cdot(27+x^2) = 0$$

$$2x\cdot(27+x^2) = 0 \begin{cases} 2x = 0 \to x = 0 \\ 27 + x^2 = 0 \to No\ tiene\ solución \end{cases}$$

Con los datos anteriores establecemos los siguientes intervalos:

$(-\infty, -\mathbf{3})$	$f'(x) = +/+ > 0$	La función es creciente es este intervalo
$(-\mathbf{3}, \mathbf{0})$	$f'(x) = +/+ > 0$	La función es creciente es este intervalo
$(\mathbf{0}, \mathbf{3})$	$f'(x) = +/+ > 0$	La función es creciente es este intervalo
$(\mathbf{3}, +\infty)$	$f'(x) = +/+ > 0$	La función es creciente es este intervalo

d)



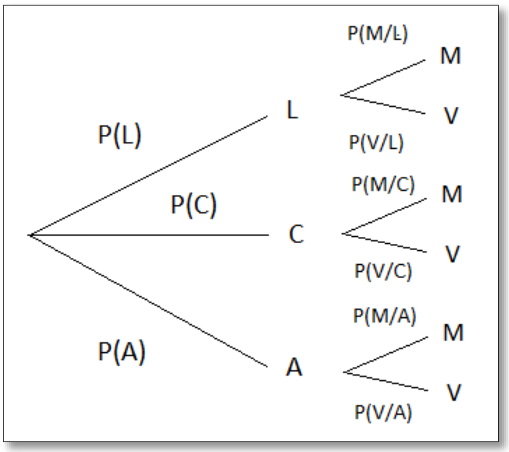
2. En la Universidad de Guadamonte hay tres facultades: de letras, de ciencias y de artes. El 60% de los estudiantes son de letras, y los de ciencias son el 30%. Si las mujeres de letras suponen el 50%, en ciencias el 60% y en arte el 70%:
   a) Dibuje un diagrama en árbol (o árbol de probabilidad) que recoja las probabilidades de los sucesos descritos.
   b) Calcule cual es la probabilidad de que un estudiante escojido al azar sea varón.
   c) Si la presidenta de la asociación de estudiantes es mujer, calcule la probabilidad de que sea de letras.

a)

Inicialmente definimos los sucesos:

- Suceso L: Estudiantes que son de letras.
- Suceso C: Estudiantes que son de ciencias.
- Suceso A: Estudiantes que son de artes.
- Suceso M: Estudiantes mujeres.
- Suceso V: Estudiantes varones.

Elaboramos un diagrama en árbol para visualizar la información aportada en el enunciado:



Sabemos que:

- El 60 % de los estudiantes son de letras, es decir: P(L) = 0,6
- El 30 % de los estudiantes son de ciencias, es decir: P(C) = 0,3
- Es decir, que el resto de estudiantes (10 %) son de artes: P(A) = 1 – P(L) – P(C) = 0,1
- El 50 % de las mujeres son de letras, es decir: P(M/L) = 0,5
- Es decir, que el resto de estudiantes de letras (50 %) son varones: P(V/L) = 1 – P(M/L) = 0,5
- El 60 % de las mujeres son de ciencias, es decir: P(M/C) = 0,6
- Es decir, que el resto de estudiantes de ciencias (40 %) son varones: P(V/C) = 1 – P(M/C) = 0,4
- El 70 % de las mujeres son de artes, es decir: P(M/A) = 0,7
- Es decir, que el resto de estudiantes de artes (30 %) son varones: P(V/A) = 1 – P(M/A) = 0,3

b)

La probabilidad de que un estudiante escogido al azar sea varón es:

$$P(V) = P(C) \cdot P(V/C) + P(L) \cdot P(V/L) + P(A) \cdot P(V/A) = 0{,}3 \cdot 0{,}4 + 0{,}6 \cdot 0{,}5 + 0{,}1 \cdot 0{,}3 = 0{,}45 = \mathbf{45}\%$$

c)

Sabiendo que la presidenta de la asociación de estudiantes es mujer, la probabilidad de que sea de letras se calcula aplicando el Teorema de Bayes.

$$P(L/M) = \frac{P(L \cap M)}{P(M)} = \frac{P(L) \cdot P(M/L)}{P(M)} = \frac{0{,}6 \cdot 0{,}5}{0{,}55} = 0,\widehat{54} = \mathbf{54,5}\ \%$$

$$P(M) = 1 - P(V) = 1 - 0{,}45 = 0{,}55$$