LOGROS Y MÉRITOS

Pega esta ficha en la tapa de tu cuaderno (cara interior).

MATRICES	**DETERMINANTES**	**SIST. ECS.**	
VECTORES	**RECTA Y PLANO**	**ÁNGULOS**	**DISTANCIAS**
LÍMITES	**CONTINUIDAD**	**DERIVABILIDAD**	**FUNCIONES**
DERIVADAS	**PRIMITIVAS**	**INT. INDEF.**	**INT. DEF.**
PROBABILIDAD	**DIST. NORMAL**	**DIST. BINOMIAL**	

REFUERZO MATEMÁTICAS II

Bloque II: Geometría

ECUACIONES DE LA RECTA

Recuerda:

- **Elementos necesarios para definir una recta:**

$$\text{Dos puntos}\begin{cases} A=(a_1,a_2,a_3) \\ B=(b_1,b_2,b_3)\end{cases} \rightarrow \text{Un punto y un vector director}\begin{cases} A=(a_1,a_2,a_3) \\ \vec{u}=(u_1,u_2,u_3)\end{cases}$$

- **Ecuación paramétrica de la recta:**

$$r\equiv\begin{cases} x=a_1+u_1\mu \\ y=a_2+u_2\mu \\ z=a_3+u_3\mu\end{cases}$$

$$\begin{cases} A=(1,-1,0) \\ \vec{u}=(1,-1,2)\end{cases} \rightarrow r\equiv\begin{cases} x=1+1\cdot\mu \\ y=-1-1\cdot\mu \\ z=0+2\cdot\mu\end{cases}$$

- **Ecuación continua de la recta:**

$$r\equiv\frac{x-a_1}{u_1}=\frac{y-a_2}{u_2}=\frac{z-a_3}{u_3}$$

$$\begin{cases} A=(1,-1,0) \\ \vec{u}=(1,-1,2)\end{cases} \rightarrow r\equiv\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-0}{2}$$

- **Ecuación general o implícita de la recta:**

$$r\equiv\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \rightarrow \text{Plano } \alpha \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \rightarrow \text{Plano } \beta\end{cases}$$

$$\begin{cases} A=(1,-1,0) \\ \vec{u}=(1,-1,2)\end{cases} \rightarrow r\equiv\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-0}{2} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-0}{2} \rightarrow 2y+z+2=0 \\ \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-1} \rightarrow x+y=0\end{cases}$$

1. Se consideran los puntos A = (1, -1, 0); B = (-1, -2, -1) y C = (1, 0, 1), calcular:

a) Las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos A y B.
b) Las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos A y C.
c) Las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos B y C.

2. Obtener un punto y un vector director de las siguientes rectas:

a) $r \equiv \begin{cases} x - z = 1 \\ y - z = -1 \end{cases}$
b) $s \equiv \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = \mu \\ Z = 3 \end{cases}$
c) $t \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y - 2z = 2 \end{cases}$
d) $l \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{2}$

3. Comprobar si los siguientes puntos pertenecen a la recta $s \equiv \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = \mu \\ Z = 3 \end{cases}$

a) A = (1, -1, 0)
b) B = (-1, -2, -1)
c) C = (1, 0, 1)

4. Calcular las siguientes rectas:

a) Recta paralela a r y que pase por el punto A.
b) Recta perpendicular a r y que pase por B.
c) Recta paralela a s y que pase por el punto A.
d) Recta perpendicular a s y que pase por B.

ECUACIONES DEL PLANO

Recuerda:

- **Elementos necesarios para definir un plano:**

$$\text{Tres puntos}\begin{cases}A=(a_1,a_2,a_3)\\B=(b_1,b_2,b_3)\\C=(c_1,c_2,c_3)\end{cases}\rightarrow \text{Un punto y dos vectores del plano}\begin{cases}A=(a_1,a_2,a_3)\\\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)\\\vec{v}=(v,v_2,v_3)\end{cases}$$

$$\text{Un punto y un vector perpendicular al plano}\begin{cases}A=(a_1,a_2,a_3)\\\vec{n}=(n_1,n_2,n_3)\end{cases}$$

- **Ecuación paramétrica del plano:**

$$\pi\equiv\begin{cases}x=a_1+u_1\mu+v_1\gamma\\y=a_2+u_2\mu+v_2\gamma\\z=a_3+u_3\mu+v_3\gamma\end{cases}$$

$$\begin{cases}A=(1,-1,0)\\\vec{u}=(1,-1,2)\\\vec{v}=(-1,-1,1)\end{cases}\rightarrow\pi\equiv\begin{cases}x=1+1\cdot\mu-1\cdot\gamma\\y=-1-1\cdot\mu-1\cdot\gamma\\z=0+2\cdot\mu+1\cdot\gamma\end{cases}$$

- **Ecuación general o implícita del plano:**

$$\pi\equiv Ax+By+Cz+D=0\ \rightarrow\vec{n}=(A,B,C)$$

$$\text{Forma 1}\begin{cases}A=(1,-1,0)\\\vec{u}=(1,-1,2)\\\vec{v}=(-1,-1,1)\end{cases}\rightarrow\pi\equiv\begin{vmatrix}x-1&y+1&z-0\\1&-1&2\\-1&-1&1\end{vmatrix}=0$$

$$\text{Forma 2}\begin{cases}A=(1,-1,0)\\\vec{n}=(1,-1,2)\end{cases}\rightarrow\ \pi\equiv 1x-1y+2z+D=0$$

$$\pi\equiv 1\cdot 1-1\cdot(-1)+2\cdot 0+D=0\rightarrow D=-2$$

$$\pi\equiv 1x-1y+2z-2=0$$

1. Se consideran los puntos A = (1, -1, 0); B = (-1, -2, -1); C = (1, 0, 1) y D = (0, 2, -1) calcular:

a) Las ecuaciones del plano que pasa por los puntos A, B y C.
b) Las ecuaciones del plano que pasa por los puntos A, B y D.
c) Las ecuaciones del plano que pasa por los puntos B, C y D.

2. Se consideran los puntos A = (1, -1, 0); B = (-1, -2, -1) y C = (1, 0, 1) y el vector $\vec{n} = (0, 2, -1)$, calcular:

a) La ecuación general del plano que pasa por el punto A y tiene como vector normal el vector $\vec{n}$.
b) La ecuación general del plano que pasa por el punto B y tiene como vector normal el vector $\vec{n}$.
c) La ecuación general del plano que pasa por el punto C y tiene como vector normal el vector $\vec{n}$.

3. Obtener un punto y un vector normal de los siguientes planos:

a) $\alpha \equiv 2x - y + z - 2 = 0$
b) $\beta \equiv y - z = -1$
c) $\pi \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 - \mu + 3\gamma \\ z = -\mu + \gamma \end{cases}$
d) $\varepsilon \equiv \begin{cases} x = 1 - \mu \\ y = -1 + 2\mu + \gamma \\ z = -2 + \gamma \end{cases}$

4. Comprobar si los siguientes puntos pertenecen al plano $\alpha \equiv 2x - y + z - 2 = 0$

a) A = (1, -1, 0)
b) B = (-1, -2, -1)
c) C = (1, 0, 1)

5. Calcular los siguientes planos:

a) Plano paralelo al plano α y que pase por el punto A.
b) Plano perpendicular al plano α y que pase por el punto B.
c) Plano paralelo a la recta $r \equiv \begin{cases} x - z = 1 \\ y - z = -1 \end{cases}$ y que pase por el punto A.
d) Plano perpendicular a la recta $r \equiv \begin{cases} x - z = 1 \\ y - z = -1 \end{cases}$ y que pase por el punto B.
e) Plano que contenga a las rectas $r \equiv \begin{cases} x - z = 1 \\ y - z = -1 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = \mu \\ Z = 3 \end{cases}$ y el punto A.
f) Plano que contenga a las rectas $r \equiv \begin{cases} x - z = 1 \\ y - z = -1 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = \mu \\ Z = 3 \end{cases}$ y el punto B.

PROBLEMAS MÉTRICOS

Recuerda:

- **Recta perpendicular común a dos rectas que se cruzan:**
  - Calculo el vector perpendicular a los vectores directores de las rectas:

$$\begin{cases} \boldsymbol{Recta\ r \rightarrow \vec{u} = (u_1, u_2, u_3)} \\ \boldsymbol{Recta\ s \rightarrow \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)} \end{cases} \rightarrow \boldsymbol{\vec{w} = \vec{u}\ x\ \vec{v}} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \boldsymbol{(w_1, w_2, w_3)}$$

  - Calculo el plano que contiene al vector $\vec{w}$ y a la recta r:

$$\boldsymbol{r \equiv \begin{cases} A = (a_1, a_2, a_3) \\ \vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \end{cases} \rightarrow \alpha \equiv \begin{cases} A = (a_1, a_2, a_3) \\ \vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \\ \vec{w} = (w_1, w_2, w_3) \end{cases}}$$

  - Calculo el plano que contiene al vector $\vec{w}$ y a la recta r:

$$\boldsymbol{s \equiv \begin{cases} B = (b_1, b_2, b_3) \\ \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \end{cases} \rightarrow \beta \equiv \begin{cases} B = (b_1, b_2, b_3) \\ \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \\ \vec{w} = (w_1, w_2, w_3) \end{cases}}$$

  - La recta t que buscamos es la intersección de los planos α y β:

$$\boldsymbol{t \equiv \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \ \rightarrow Plano\ \alpha \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \ \rightarrow Plano\ \beta \end{cases}}$$

- **Recta que corta otras dos rectas y pasa por un punto:**
  - Calculo el plano que contiene al punto P y a la recta r:

$$\boldsymbol{r \equiv \begin{cases} A = (a_1, a_2, a_3) \\ \vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \end{cases} \rightarrow \alpha \equiv \begin{cases} A = (a_1, a_2, a_3) \\ \vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \\ \overrightarrow{AP} = (a'_1, a'_2, a'_3) \end{cases}}$$

  - Calculo el plano que contiene al punto P y a la recta s:

$$\boldsymbol{s \equiv \begin{cases} B = (b_1, b_2, b_3) \\ \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \end{cases} \rightarrow \beta \equiv \begin{cases} B = (b_1, b_2, b_3) \\ \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \\ \overrightarrow{BP} = (b'_1, b'_2, b'_3) \end{cases}}$$

- La recta t que buscamos es la intersección de los planos $\alpha\ y\ \beta$:

$$\boldsymbol{t} \equiv \begin{cases} \boldsymbol{Ax + By + Cz + D = 0} \ \rightarrow \boldsymbol{Plano\ \alpha} \\ \boldsymbol{A'x + B'y + C'z + D' = 0} \ \rightarrow \boldsymbol{Plano\ \beta} \end{cases}$$

1. Calcular las ecuaciones de las siguientes rectas:

a) Recta perpendicular a las rectas $r \equiv \begin{cases} x - z = 1 \\ y - z = -1 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = \mu \\ Z = 3 \end{cases}$

b) Recta perpendicular a las rectas $t \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y - 2z = 2 \end{cases}$ y $l \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{2}$

c) Recta que corte a las rectas $r \equiv \begin{cases} x - z = 1 \\ y - z = -1 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = \mu \\ Z = 3 \end{cases}$ y que pase por el punto A = (1, -1, 0).

d) Recta que corte a las rectas $t \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y - 2z = 2 \end{cases}$ y $l \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{2}$ y que pase por el punto B = (-1, -2, -1).

POSICIONES RELATIVAS

Recuerda:

- **Posiciones relativas entre rectas: Estudio los vectores directores de las rectas.**

$$\boldsymbol{r \equiv \begin{cases} A = (a_1, a_2, a_3) \\ \vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \end{cases} \; y \; s \equiv \begin{cases} B = (b_1, b_2, b_3) \\ \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \end{cases}}$$

$$\boldsymbol{\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (c_1, c_2, c_3) \\ \vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \\ \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \end{cases} \rightarrow M = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}}$$

  - Cuando las ecuaciones de las rectas son iguales → **Las rectas son coincidentes.**
  - Cuando los vectores directores de las rectas son iguales o proporcionales → **Las rectas son paralelas.**
  - Cuando el determinante de la matriz M es cero los vectores son L.D, es decir, todos los elementos pertenecen al mismo plano → **Las rectas se cortan (rectas secantes).**
  - Cuando el determinante de la matriz M es distinto de cero los vectores son L.I, es decir, los elementos no pertenecen al mismo plano → **Las rectas se cruzan.**

- **Posiciones relativas entre planos: Comparo los coeficientes.**

$$\boldsymbol{\alpha \equiv Ax + By + Cz + D = 0 \rightarrow \overrightarrow{n_\alpha} = (A, B, C)}$$
$$\boldsymbol{\beta \equiv A'x + B'y + C'z + D' = 0 \rightarrow \overrightarrow{n_\beta} = (A', B', C')}$$

  - Cuando las ecuaciones de los planos son iguales → **Los planos son coincidentes.**

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$$

  - Cuando los vectores normales de los planos son iguales o proporcionales → **Los planos son paralelos.**

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$$

- Cuando los vectores normales de los planos son distintos (o cuando el producto escalar de los vectores normales es distinto de cero) → **Los planos se cortan (planos secantes).**

$$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$$

- **Posiciones relativas entre recta y plano: Estudio los vectores característicos del plano y la recta.**

$$\boldsymbol{r \equiv \begin{cases} A = (a_1, a_2, a_3) \\ \vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \end{cases} \; y \quad \alpha \equiv Ax + By + Cz + D = 0 \rightarrow \overrightarrow{n_\alpha} = (A, B, C)}$$

- Cuando el producto escalar de los vectores $\vec{u}$ y $\overrightarrow{n_\alpha}$ es distinto de cero los vectores son perpendiculares, es decir → **El plano y la recta se cortan (secantes).**

- Cuando el producto escalar de los vectores $\vec{u}$ y $\overrightarrow{n_\alpha}$ es cero:

  - Y el punto de la recta pertenece al plano → **La recta pertenece al plano.**
  - Y el punto de la recta no pertenece al plano → **El plano y la recta son paralelos.**

1. Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = \mu \\ Z = 3 \end{cases}$; $s \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y - 2z = 2 \end{cases}$ $y \;\; t \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{0}$, calcular la posición relativa de:

a) r y s.
b) r y t.
c) s y t.

2. Dados los planos $\alpha \equiv 2x - y + z - 2 = 0$; $\beta \equiv -6x + 3y - 3z = -1 \; y \; \pi \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 - \mu + 3\gamma \\ z = -\mu + \gamma \end{cases}$, calcular la posición relativa de:

a) α y β.
b) π y β.
c) α y π.

3. Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = \mu \\ Z = 3 \end{cases}$ $y \; s \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y - 2z = 2 \end{cases}$ y dados los planos $\alpha \equiv 2x - 2y + z - 2 = 0 \; y \; \beta \equiv -6x + 3y - 3z = -1$, calcular las posiciones relativas de:

a) α y r.
b) π y s.
c) β y r.

ÁNGULOS ENTRE ELEMENTOS GEOMÉTRICOS

Recuerda:

- **Cálculo del ángulo que forman dos rectas: Ángulo formado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$**

$$\begin{cases} \boldsymbol{Recta\, r \to \vec{u} = (u_1, u_2, u_3)} \\ \boldsymbol{Recta\, s \to \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)} \end{cases} \to \boldsymbol{cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} \to \alpha = cos^{-1}\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}\right)}$$

- **Cálculo del ángulo que forman dos planos: Ángulo formado por los vectores $\overrightarrow{n_1}$ y $\overrightarrow{n_2}$**

$$\begin{cases} \boldsymbol{\alpha \equiv Ax + By + Cz + D = 0 \to \overrightarrow{n_1} = (A, B, C)} \\ \boldsymbol{\beta \equiv A'x + B'y + C'z + D' = 0 \to \overrightarrow{n_2} = (A', B', C')} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{cos\alpha = \frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|} \to \alpha = cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}\right)}$$

- **Cálculo del ángulo que forman una recta y un plano: Ángulo formado por los vectores $\vec{u}$ y $\overrightarrow{n_1}$.**

$$\begin{cases} \boldsymbol{Recta\, r \to \vec{u} = (u_1, u_2, u_3)} \\ \boldsymbol{\alpha \equiv Ax + By + Cz + D = 0 \to \overrightarrow{n_1} = (A, B, C)} \end{cases} \to \boldsymbol{sen\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\overrightarrow{n_1}}{|\vec{u}|\cdot|\overrightarrow{n_1}|} \to \alpha = sen^{-1}\left(\frac{\vec{u}\cdot\overrightarrow{n_1}}{|\vec{u}|\cdot|\overrightarrow{n_1}|}\right)}$$

1. Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = \mu \\ Z = 3 \end{cases}$; $s \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y - 2z = 2 \end{cases}$ y $t \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{0}$, calcular el ángulo que forman:

a) r y s.
b) r y t.
c) s y t.

2. Dados los planos $\alpha \equiv 2x - y + z - 2 = 0$; $\beta \equiv -6x + 3y - 3z = -1$ y $\pi \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 - \mu + 3\gamma, \\ z = -\mu + \gamma \end{cases}$ calcular el ángulo que forman:

a) α y β.
b) π y β.
c) α y π.

3. Calcular el ángulo que forman:

a) α y r.
b) π y s.
c) β y r.

DISTANCIAS ENTRE ELEMENTOS GEOMÉTRICOS

Recuerda:

- **Distancia de un punto a una recta:**

$$\begin{cases} r \equiv \begin{cases} A = (a_1, a_2, a_3) \\ \vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \end{cases} \\ P = (p_1, p_2, p_3) \end{cases} \rightarrow d(P, r) = \frac{|\vec{u}\, x\, \overrightarrow{AP}|}{|\vec{u}|}$$

- **Distancia de un punto a un plano:**

$$\begin{cases} \alpha \equiv Ax + By + Cz + D = 0 \rightarrow \vec{n} = (A, B, C) \\ P = (p_1, p_2, p_3) \end{cases}$$

$$d(P, \pi) = \frac{|A \cdot p_1 + B \cdot p_2 + C \cdot p_3 + D|}{|\vec{n}|}$$

- **Distancia entre dos rectas:**

$$\begin{cases} r \equiv \begin{cases} A = (a_1, a_2, a_3) \\ \vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \end{cases} \\ s \equiv \begin{cases} B = (b_1, b_2, b_3) \\ \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \end{cases} \end{cases} \rightarrow d(r, s) = d(r, B) = \frac{|\vec{u}\, x\, \overrightarrow{AB}|}{|\vec{u}|}$$

- **Distancia entre dos planos:**

$$\begin{cases} \alpha \equiv Ax + By + Cz + D = 0 \rightarrow \overrightarrow{n_1} = (A, B, C) \rightarrow Q = (q_1, q_2, q_3) \\ \beta \equiv A'x + B'y + C'z + D' = 0 \rightarrow \overrightarrow{n_2} = (A', B', C') \rightarrow P = (p_1, p_2, p_3) \end{cases}$$

$$d(\alpha, \beta) = d(\alpha, P) = \frac{|A \cdot p_1 + B \cdot p_2 + C \cdot p_3 + D|}{|\overrightarrow{n_1}|}$$

- **Distancia entre una recta y un plano:**

$$\begin{cases} r \equiv \begin{cases} A = (a_1, a_2, a_3) \\ \vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \end{cases} \\ \alpha \equiv Ax + By + Cz + D = 0 \rightarrow \overrightarrow{n_1} = (A, B, C) \end{cases}$$

$$d(r, \alpha) = d(A, \alpha) = \frac{|A \cdot a_1 + B \cdot a_2 + C \cdot a_3 + D|}{|\overrightarrow{n_1}|}$$

1. Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = \mu \\ Z = 3 \end{cases}$; $s \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y - 2z = 2 \end{cases}$ y $t \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{0}$ y el punto $A = (0, 2, -1)$, calcular la distancia entre:

a) A y r.
b) A y s.
c) A y t.
d) r y s.
e) r y t.
f) s y t.

2. Dados los planos $\alpha \equiv 2x - y + z - 2 = 0$; $\beta \equiv -6x + 3y - 3z = -1$ y $\pi \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 - \mu + 3\gamma \\ z = -\mu + \gamma \end{cases}$, y el punto $A = (0, 2, -1)$, calcular la distancia entre:

a) α y A.
b) π y A.
c) β y A.
d) α y β.
e) π y β.
f) α y π.

3. Calcular la distancia entre:

a) α y r.
b) π y s.
c) β y r.